

Rozvoje Taylorového typu s voľnými parametrami

Andrej Liptaj

Fyzikálny ústav SAV v. v. i., Bratislava

Motivácia

Rozvoje a aproximácie funkcií patria k štandardným nástrojom pri opise fyzikálnych systémov. Významnú úlohu tu zohrávajú mocninové rady. Tie poskytujú vysoko presný opis funkcie v okolí rozvoja, ale nie sú schopné postihnúť niektoré vlastnosti funkcií mimo tohto bodu, ktoré sa vo fyzikálnych modeloch bežne vyskytujú. Sú to napríklad póly, podstatné singularity, body vetvenia, rezy a iné. Tiež platí, že pre niektoré funkcie mocninový rad konverguje pomaly a na malej oblasti (napr. logaritmy). Všetky tieto nedostatky sa v našej práci pokúšame odstrániť zavedením parametrických mocninových rozvojev vybudovaných umocňovaním vhodne zvolenej funkcie. Každá takáto konštrukcia automaticky spĺňa Taylorovú podmienku (reprodukuje derivácie rozvíjanej funkcie v danom bode) a zároveň umožňuje nastaviť hodnotu voľných parametrov vhodným spôsobom tak, aby výsledný rozvoj získal niektoré z vyššie uvedených vlastností, resp. aby sa zlepšila jeho konvergencia.

Metóda

Rozvoje vznikajú substitúciou $x \rightarrow g(p_i,x)$ v mocninových radoch $\sum \alpha_n x^n$, kde $\{p_i\}$ predstavuje množinu parametrov. Ak zavedieme označenie

$$\mathcal{A}^f \approx f \Leftrightarrow \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{A}^f(x) |_{x=0} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) |_{x=0}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

a rozvoj hľadáme v tvare

$$\mathcal{A}^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(x)]^n, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) \neq 0,$$

potom

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(g^{-1}(x)) |_{x=0} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n d_k^f B_{n,k} (d_1^{g^{-1}}, d_2^{g^{-1}}, \dots, d_{n-k+1}^{g^{-1}}),$$

kde $B_{n,k}$ označuje neúplné Bellove mnohočleny a $d_n^h := (d^n/dx^n)h(x)|_{x=0}$. Kľúčové je nájsť vyjadrenie pre $B_{n,k}$, čo môžeme tiež vnímať ako výsledok tejto práce. Túto úlohu riešime hľadaním vyjadrenia pre n -tú deriváciu k -tej mocniny inverznej funkcie $(d^n/dx^n)(g^{-1})^k|_{x=0}$. Derivovanú funkciu interpretujeme ako $u(v(x))$, kde $v=g^{-1}$ a $u(x)=x^k$. Máme $d_j^u=k!\delta_{j,k}$ z čoho vyplýva

$$\frac{d^n}{dx^n} (g^{-1}(x))^k |_{x=0} = d_n^{u \circ v} = \sum_{j=0}^n d_j^u B_{n,j} (d_1^v, d_2^v, \dots) = k! \sum_{j=0}^n \delta_{j,k} B_{n,j} = k! B_{n,k}.$$

Identita $B_{n,k}(wqc_1,wq^2c_2,wq^3c_3,...)=q^n w^k B_{n,k}(c_1,c_2,c_3,...)$ nám poskytuje prvý voľný parameter w :

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n d_k^f B_{n,k}^{\circ} \right) g^n(x) \implies \begin{cases} f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n d_k^f w^k B_{n,k}^{\circ} \right) g^n\left(\frac{x}{w}\right), \\ f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{d_k^f}{q^n} B_{n,k}^{\circ} \right) [\overline{q}g(x)]^n. \end{cases}$$

Zoznam

Šesť parametrických funkcií, ktoré sú po dvojiciach inverzné.

$$g_A(x) = \left(\frac{1+at+t^2}{1+bt+ct^2} \right)^{\alpha} - 1, \quad t = \frac{x}{w}$$
$$B_{n,k} = w^k \frac{n!}{k!} \sum_{m=k}^n \beta_m \sum_{l=0}^m (-1)^{m-l} \binom{m}{l} \binom{l}{n}^{\alpha}, \quad \beta_m = \frac{k}{m} \sum_{p=0}^{m-k} \sum_{j=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{m}{p-j} \binom{p-j}{j} \binom{2m-k-p-1}{m-1} b^{p-2j} c^j (a-b)^{p+k-2m} (c-1)^{m-k-p}.$$

$$g_B(x) = \frac{a-bt+\operatorname{sgn}_{(b-a)}\sqrt{(b^2-4c)t^2+[4(c+1)-2ab]t+(a^2-4)}}{2[ct-1]}, \quad t = \left(1+\frac{x}{w}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$B_{n,k} = w^k \frac{n!}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} a^{p-2q} \binom{\alpha j}{p-q} \binom{p-q}{q} \sum_{s=0}^{\lfloor (n-p)/2 \rfloor} b^{p-p-2s} c^s \binom{-\alpha j}{n-p-s} \binom{n-p-s}{s}.$$

$$g_C(x) = \frac{[(1+t)^{\beta} + A]^{\alpha} - (1+A)^{\alpha}}{1+B[(1+t)^{\beta} + A]^{\alpha}}, \quad t = \frac{x}{w}$$
$$B_{n,k} = w^k \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \sum_{p=0}^n \binom{j/\beta}{p} \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} (-1)^{p-q} \sum_{r=0}^n \binom{q/\alpha}{r} \binom{-q/\alpha}{n-r} (1+A)^{p-\alpha r} (-B)^{n-r}.$$

$$g_D(x) = \left\{ \left[\frac{t+(1+A)^{\alpha}}{1-Bt} \right]^{1/\alpha} - A \right\}^{1/\beta} - 1, \quad t = \frac{x}{w}$$
$$B_{n,k} = w^k \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \sum_{p=0}^n \binom{-j}{p} \rho^p \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} (-1)^{p-q} \sum_{s=0}^n \binom{\alpha q}{s} D^{-s} \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} (-1)^{s-t} \binom{\beta t}{n}^{\alpha}, \quad D = 1+A \text{ and } \rho = \frac{BD^{\alpha}}{1+BD^{\alpha}}.$$

$$g_E(x) = \frac{[\ln(c+t)+d]^{\alpha} - [\ln(c)+d]^{\alpha}}{1+B[\ln(c+t)+d]^{\alpha}}, \quad t = \frac{x}{w}$$
$$B_{n,k} = w^k \frac{n!}{k!} c^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \sum_{p=0}^n \frac{j^p}{p!} \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} (-L_0)^{p-q} \sum_{r=0}^n \binom{q/\alpha}{r} \binom{-q/\alpha}{n-r} (-B)^{n-r} L_0^{q-\alpha r}, \quad L_0 = \ln c + d.$$

$$g_F(x) = \exp \left\{ \left[\frac{t+(\ln c+d)^{\alpha}}{1-Bt} \right]^{1/\alpha} - d \right\} - c, \quad t = \frac{x}{w}$$
$$B_{n,k} = w^k \frac{B^{-k}}{k! c^n} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \sum_{p=0}^n \binom{-j}{p} \left(\frac{B}{M} \right)^p \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} (-L_0^q)^{p-q} \sum_{s=1}^n s! \binom{\alpha q}{s} L_0^{\alpha q-s} s(n,s), \quad L_0 = \ln c + d, \quad s(n,s) = \text{Stirling nb. of the first kind}$$

Príklady

KONVERGENCIA Rozvíjame $f(x)=\ln(x+1)$ v $x=0$. Obyčajný mocninový rad: koeficienty = harmonický rad so striedavými znamienkami $\Rightarrow$ ***pomalá konvergencia*** na ***malom intervale*** (-1,1].

Zvolíme: g_C s $A=0, B=1, \alpha=1/2, w=1$. $\ln(1+x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_C^n(x)$

$$g_C(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}, \quad x = \left(\frac{1+g_C}{1-g_C} \right)^2 - 1, \quad \ln(1+g_C) = g_C - \frac{g_C^2}{2} + \frac{g_C^3}{3} - \frac{g_C^4}{4} + \dots$$

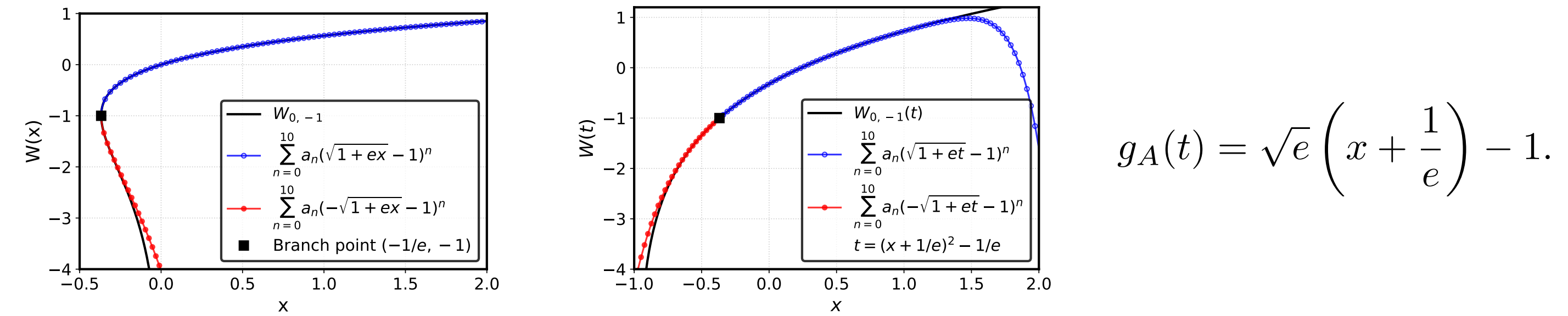
$$\ln(1+x) = \ln \left[\left(\frac{1+g_C}{1-g_C} \right)^2 \right] = 2 \ln(1+g_C) - 2 \ln(1-g_C) = 4 \left(g_C + \frac{g_C^3}{3} + \frac{g_C^5}{5} + \frac{g_C^7}{7} \dots \right)$$

Konverguje na (-1,+∞) a konvergencia je urýchlená (bez párných mocnín a bez striedania znamienok).

BODY VETVENIA A REZY Rozvíjame hlavnú vetvu Lambertovej $W_0(x)$ funkcie v $x=0$. Používame g_A s $B=C=0, \alpha=1/2, A=e=2,7182\dots$, čiže

$$g_A(x) = \vartheta \sqrt{1+ex} - 1, \quad \vartheta = 1.$$

Voľbou $\vartheta = -1$ rozvoj aproximuje aj druhú vetvu $W_{-1}(x)$. Rigorózný dôkaz je založený na substitúcii $t=(x+1/e)^2-1/e$, ktorá odstráni bod vetvenia odmocninového typu tak vo funkcii W ako aj v rozvoji. Potom je zjavné, že rozvoj sa stáva obyčajným Taylorovým rozvojom, ktorý k funkcii konverguje. To znamená, že pri spätnej substitúcii rozvoje v $g_A^{\vartheta=\pm 1}$ konvergujú k W_0 resp. k W_{-1} .



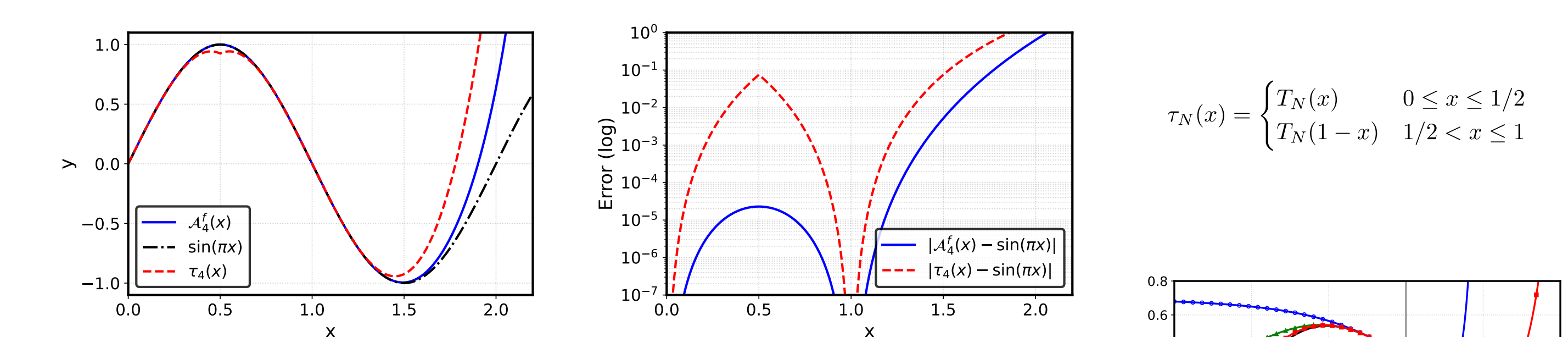
$$g_A(t) = \sqrt{e} \left(x + \frac{1}{e} \right) - 1.$$

INTERPOLÁCIA Ak pre nejaké x_0 máme $g(x_0)=0$ potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n(x_0)=0$. Voľbou parametrov môžeme vlastnosť $g(x_0)=0$ dosiahnuť, a tak interpolovať bod $(x_0,0)$. V okolí x_0 však spravidla už rad nekonverguje (funkcia nie je bijektívna). Pridaním podmienky symetrie $g(x_1)=g(x_2) \iff f(x_1)=f(x_2)$ zaručíme konvergenciu aj mimo interval bijekcie a v niektorých prípadoch môžeme dosiahnuť výrazne urýchlenie konvergency. Napr. pre g_A s $c=b=0, w=1, \alpha=1$ a $a=-1$. Máme:

$$g_A(x)|_{x=1} = (x^2-x)|_{x=1} = 0 = \sin(\pi x)|_{x=1}$$

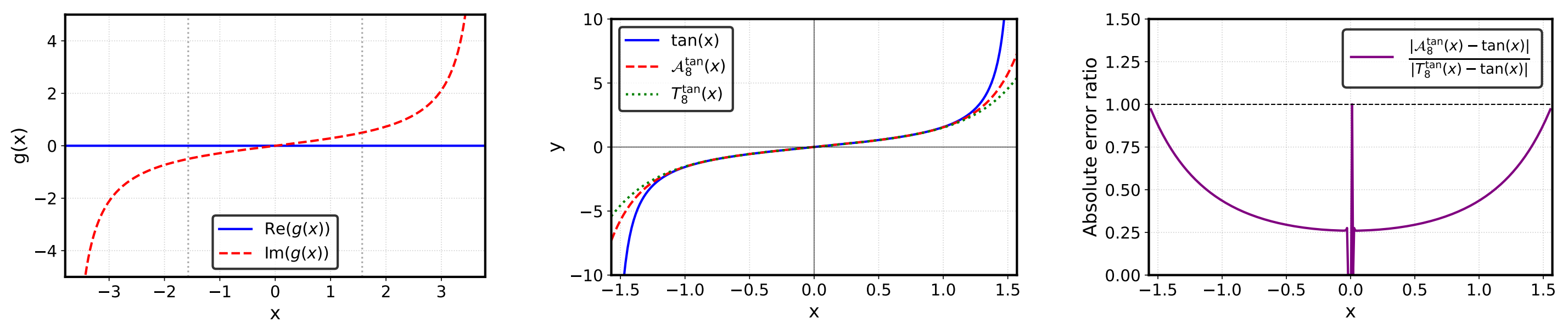
$$g_A(1/2-x) = g_A(1/2+x), \quad \sin[\pi(1/2-x)] = \sin[\pi(1/2+x)].$$

Porovnajme so symetrizovaným Taylorovým mnohočlenom $T_N(x)=\sum_{n=1}^N \alpha_n x^n$:



Ďalšou možnosťou je ***optimalizácia parametrov*** s cieľom získať najlepší popis zvolenej funkcie na danom intervale (znižiť počet členov alebo výpočtový čas na dosiahnutie danej presnosti). Obrázok ukazuje popis Airyho funkcie za pomoci $g_F(x)=\exp(11x/(10w-x))-1$, pričom sa nastavuje iba parameter w , a to takým spôsobom aby sa dosiahla nula funkcie pre $x=-2,33811\dots$.

INÉ Parametrická voľnosť umožňuje zamerať sa na tie vlastnosti funkcie a jej rozvoja, ktoré chceme ovplyvniť. Napríklad zvoliť funkciu g tak, aby jej správanie (konvexnosť/konkávnosť, inflexný bod) zodpovedalo rozvíjanej funkcii. Následne môžeme očakávať urýchlenie konvergency. Uvádzame $f(x)=\tan(x)$ aproximovanú za pomoci $g_A(x)=ixx_0/(x_0^2-x^2)$, kde $x_0=\pi(1+\sqrt{2})/2$.



Záver

Nami predkladaná metóda dokáže vylepšiť konvergenčné vlastnosti mocninových radov a to tak ohľadom rýchlosti ako aj ohľadom oblasti. Oproti konkurenčným metódam (Eulerova/Kummersova transformácia) má neporovnateľne väčšiu variabilitu: možnosť voľby funkcie g ako aj možnosť voľby typu a množstva voľných parametrov (uvádzané funkcie sú iba príklady).